Ασκήσεις στις Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις α' τάξεως

1) Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

i. $y'+2y=e^{-x}$, ii. $y'+2xy=x$, iii. $y'-\frac{1}{x}y=x,\ x>0$

iv. $x\cdot y'-y=x^2\cdot e^x$, v. $y'+y\cdot\cos x=0$, vi. $x(x+1)y'+(2x+1)y=x^2-1$

ΛΥΣΗ

i) $y'+2y=e^{-x} \Rightarrow y'\cdot e^{\int 2\,dx}+2y\cdot e^{\int 2\,dx}=e^{-x}\cdot e^{\int 2\,dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(y\cdot e^{\int 2\,dx}\right)'=e^{\int 2\,dx-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{\int 2\,dx}=\int e^{\int 2\,dx-x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{2x}=\int e^{2x-x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{2x}=\int e^{x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{2x}=e^{x}+c \Rightarrow$

$\Rightarrow y=e^{-x}+c\cdot e^{-2x},\ \forall c\in\mathbb{R}$

ii) $y'+2xy=x \Rightarrow y'\cdot e^{\int 2x\,dx}+2x\cdot y\cdot e^{\int 2x\,dx}=x\cdot e^{\int 2x\,dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(y\cdot e^{\int 2x\,dx}\right)'=x\cdot e^{\int 2x\,dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{\int 2x\,dx}=\int x\cdot e^{\int 2x\,dx}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{x^2}=\int x\cdot e^{x^2}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot e^{x^2}=\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+c \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}+c\cdot e^{-x^2},\ \forall c\in\mathbb{R}$.

iii) $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \,, \forall x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} - \frac{1}{x} \cdot y \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(y \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx}\right)' = x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{-\log x} = \int x \cdot e^{-\log x} \, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{-\log x} = \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} y = x + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x^2 + c \cdot x \,, c \in \mathbb{R} \,, x > 0$

iv) $x \cdot y' - y = x^2 \cdot e^x \Rightarrow y' - \frac{1}{x} y = x \cdot e^x \,, \forall x>0$

$\Rightarrow y' \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} - \frac{1}{x} \cdot y \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = x \cdot e^x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \,, \forall x>0$

$\Rightarrow \left(y \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx}\right)' = x \cdot e^{x - \int \frac{1}{x} dx} \,, \forall x>0$

$\Rightarrow y \cdot e^{-\log x} = \int x \cdot e^{x - \log x} \, dx \,, \forall x>0$

$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{x} = \int \cancel{x} \cdot e^x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx \,, \forall x>0$

$\Rightarrow y = x \cdot e^x + c \,, c \in \mathbb{R} \,, x>0$

v) $y' + y \cdot \cos x = 0 \Rightarrow y' \cdot e^{\int \cos x \, dx} + y \cdot \cos x \cdot e^{\int \cos x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \cos x \, dx}\right)' = 0 \Rightarrow y \cdot e^{\int \cos x \, dx} = c \,, c \in \mathbb{R}$

Αρκεί, να υπολογίσε το $\int \cos x \, dx = \sin x$

Άρα, $y = c \cdot e^{-\sin x} \,, c \in \mathbb{R}$.

vi) $x(x+1)y' + (2x+1)y = x^2-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' + \frac{2x+1}{x(x+1)} y = \frac{x^2-1}{x(x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' + \frac{2x+1}{x(x+1)} y = \frac{x-1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} + y \cdot \frac{2x+1}{x(x+1)} \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx}\right)' = \left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} = \int \left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx} dx \quad ①$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x+1} dx \quad ②$$

όπου

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \overset{x\neq -1}{\underset{x\neq 0}{\Rightarrow}} 2x+1 = (x+1)A + B\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+1 = (A+B)x + A \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A+B = 2 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

Άρα, στη ② είναι:

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \log x + \log(x+1) =$$
$$= \log(x^2+x).$$

Άρα, ①:

$$\rightsquigarrow y \cdot e^{\log(x^2+x)} = \int \left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot e^{\log(x^2+x)} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (x^2+x) = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot (x^2+x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (x^2+x) = \int (x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x^2+x) = \int x^2-1\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x^2+x) = \frac{x^3}{3} - x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x^2+x) = \frac{x^3-3x}{3} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3-3x}{3\cdot(x^2+x)} + \frac{c}{x^2+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2-3}{3\cdot(x+1)} + \frac{c}{x^2+x}, \quad c\in\mathbb{R} \text{ και } (x\neq 0 \,\&\, x\neq -1)$$

2) Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

i) $y' = 2-3y$, αν $y(0) = 2/3$

ii) $y' + \frac{1}{\cos^2 x}y = \frac{1}{\cos^2 x}$, αν $y(0) = -3$

iii) $(x+1)y' + y = \log x$, αν $y(1) = 10$.

iv) $y' + \frac{1}{\sqrt{x}}y = e^{\sqrt{x}/2}$, αν $y(1) = -1$

ΛΥΣΗ

Οι διαφορικές εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν είτε με αόριστο, είτε με ορισμένη ολοκλήρωση.

i) Ας προτιμήσουμε αόριστο:

$$y' + 3y = 2 \Rightarrow y'\cdot e^{\int 3\,dx} + 3y\cdot e^{\int 3dx} = 2\cdot e^{\int 3dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y\cdot e^{\int 3dx}\right)' = 2\cdot e^{\int 3dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{3x} = \int 2\cdot e^{3x} \Rightarrow y\cdot e^{3x} = \frac{2}{3}\cdot e^{3x} + c \Rightarrow$$

$$\overset{y(0)=\frac{2}{3}}{\Rightarrow} \frac{2}{3}\cdot e^{3\cdot 0} = \frac{2}{3}\cdot e^{3\cdot 0} + c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Άρα, $y = \frac{2}{3} + \frac{c}{e^{3x}} = \frac{2}{3}$.

ii) $y' + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y = \frac{1}{co^2 x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' \cdot e^{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx} + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y \cdot e^{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\tan x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x} \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\tan x} = \int (\tan x)' \cdot e^{\tan x} \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{c}{e^{\tan x}}, \quad \forall x, c \in \mathbb{R}$$

Αλλα $y(0) = -3$, $\quad -3 = 1 + \frac{c}{e^{\tan 0}} \Rightarrow \boxed{c = -4}$

Αρα, $y = 1 - \frac{4}{e^{\tan x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) $(x+1) y' + y = \log x \Rightarrow y' + \frac{1}{x+1} \cdot y = \frac{\log x}{x+1}, \quad x \neq -1, \; x > 0$

$$e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \cdot y' + \frac{1}{x+1} \cdot y \cdot e^{\int \frac{1}{x+1} dx} = \frac{\log x}{x+1} \cdot e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \right)' = \frac{\log x}{x+1} \cdot e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\log(x+1)} = \int \frac{\log x}{x+1} \cdot e^{\log(x+1)} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (x+1) = \int \log x \, dx \Rightarrow y(x+1) = \int (x)' \cdot \log x \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x+1) = x \log x - x + c \Rightarrow y = \frac{x \log x - x + c}{x+1}, \quad \forall x > 0$$

Για $x = 1 \Rightarrow \frac{-1+c}{2} = 10 \Rightarrow c = 21$ αρα, $y = \frac{x \cdot \log x - x + 21}{x+1}, \; x > 0$

iv) $y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = e^{\sqrt{x}/2} \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow y' e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y \cdot e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = e^{\sqrt{x}/2} \cdot e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx}\right)' = e^{\sqrt{x}/2} \cdot e^{\int 1/\sqrt{x}\, dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{2\sqrt{x}} = \int e^{\sqrt{x}/2} \cdot e^{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{2\sqrt{x}} = \int e^{\sqrt{x}/2 + 2\sqrt{x}} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{2\sqrt{x}} = \int e^{\frac{5\sqrt{x}}{2}} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{2\sqrt{x}} = \int e^{5/2 \cdot x^{1/2}} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot e^{2\sqrt{x}} = \frac{4}{25} e^{\frac{5}{2}\sqrt{x}} \cdot (5\sqrt{x} - 2) + c$

$\Rightarrow y = \frac{4}{25} \cdot e^{5/2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}} \cdot (5\sqrt{x} - 2) + \frac{c}{e^{2\sqrt{x}}}$

για $x = 1$, τοτε

$-1 = \frac{4}{25} \cdot e^{1/2} \cdot (5 - 2) + \frac{c}{e^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = \frac{4}{25} \cdot \sqrt{e} \cdot 3 + \frac{c}{e^2} \Rightarrow c = \left(-1 - \frac{12}{25}\sqrt{e}\right) \cdot e^2$

Αρα, αν αντικατασταθεί η $c \in \mathbb{R}$ τότε βρέθηκε η y.

3) Η ένταση του ηλ. ρεύματος (I) σε ένα ηλ. κύκλωμα ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dI}{dt} + I = ημt$.
Εάν $I(0) = 0$ να υπολογιστεί η ένταση $I(t)$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{dI}{dt} + I = ημt \Rightarrow I'(t) + I(t) = ημt$$

Πρόκειται για μια γραμμική διαφορική εξίσωση α' τάξης

$$e^{\int 1 dt} \cdot I'(t) + I(t) \cdot e^{\int 1 dt} = e^{\int 1 dt} \cdot ημt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I(t) \cdot e^t)' = e^t \cdot ημt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) \cdot e^t = \int e^t \cdot ημt \, dt \quad (1)$$

$$\int e^t \cdot ημt \, dt = e^t \cdot ημt - \int e^t \cdot συνt =$$

$$= e^t \cdot ημt - e^t \cdot συνt - \int e^t \cdot ημt \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int e^t \cdot ημt = e^t \cdot ημt - e^t \cdot συνt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^t \cdot ημt = \frac{1}{2}(e^t \cdot ημt - e^t \cdot συνt)$$

Άρα, $(1) \rightarrow I(t) \cdot e^t = \frac{1}{2}(e^t \cdot ημt - e^t \cdot συνt) + c \Rightarrow$

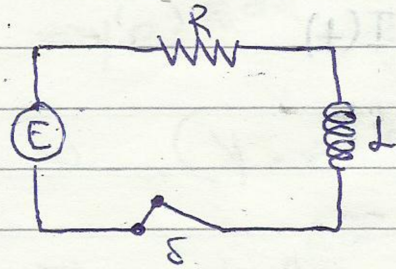
$$\Rightarrow I(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^t} \cdot (e^t \cdot ημt - e^t \cdot συνt) + c/e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{1}{2} \cdot (ημt - συνt) + c/e^t$$

$I(0) = 0$, Άρα, $I(0) = \frac{1}{2}(ημ0 - συν0) + c/e^t \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$

Άρα, $I(t) = \frac{1}{2}(ημt - συνt + 1) + \frac{1}{2} e^{-t}$.

4) Σύμφωνα με τον Κανόνα του Kirchhoff για το ακόλουθο κύκλωμα ισχύει ότι: $L\cdot\frac{dI}{dt}+RI=E(t)$



i) Αν $R=12\,\Omega$, $L=4H$ και $E=60V$

α. να βρείτε την έκφραση $I(t)$, όπου t sec μετά το κλείσιμο του δ.

β. να βρείτε το $\lim_{t\to\infty} I(t)$

Ποιο το συμπέρασμα;

ii) Αν στο κύκλωμα αντί για μπαταρία οπού δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη E, χρησιμοποιούσαμε μια γεννήτρια που δίνει $E(t)=60\cdot ημ3t$, να βρείτε την έκφραση $E(t)$.

ΛΥΣΗ

i) α. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές R, L και E τότε ο Κ.Κ. γράφεται:

$$4\cdot I'(t)+12I(t)=60 \Leftrightarrow I'+3I=15.$$

$$I'\cdot e^{\int 3dt}+I\cdot 3\cdot e^{\int 3dt}=15\cdot e^{\int 3dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(I\cdot e^{\int 3dt}\right)'=15\cdot e^{\int 3dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot e^{\int 3dt}=\int 15\cdot e^{\int 3dt}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot e^{3t}=15\cdot\int e^{3t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot e^{3t}=15\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3t}+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{5\cdot e^{3t}}{e^{3t}}+\frac{c}{e^{3t}} \Rightarrow I=5+\frac{c}{e^{3t}}.$$

β.

$$\lim_{t\to\infty} I(t)=\lim_{t\to\infty}\left(5+\frac{c}{e^{3t}}\right)=5.$$

Το συμπέρασμα μας από το (β) είναι ότι για "μεγάλες" τιμές t έπειτα γίνεται σταθερή και $y = I(t)$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 5$

ii) Γνωρίζοντας την Κ.Κ

$$I' + 3I = 15 \cdot E \cdot \eta\mu 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I' \cdot e^{\int 3dt} + 3 \cdot e^{\int 3dt} \cdot I = 15 \cdot e^{\int 3dt} \cdot \eta\mu 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I \cdot e^{3t})' = 15 \cdot e^{3t} \cdot \eta\mu 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 5 \int 3 \cdot e^{3t} \cdot \eta\mu 3t \, dt \quad (1)$$

Θέτουμε

$$J = \int 3 \cdot e^{3t} \cdot \eta\mu 3t \, dt$$

οπότε

$$J = \int (e^{3t})' \cdot \eta\mu 3t \, dt = e^{3t} \cdot \eta\mu 3t - \int 3 \cdot e^{3t} \sigma\upsilon\nu 3t \, dt$$

$$= e^{3t} \eta\mu 3t - \int (e^{3t})' \cdot \sigma\upsilon\nu 3t \, dt =$$

$$= e^{3t} \cdot \eta\mu 3t - e^{3t} \cdot \sigma\upsilon\nu 3t + 3 \int e^{3t} \cdot \eta\mu 3t \, dt =$$

$$= e^{3t} (3\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) - 3J.$$

Άρα,

$$J = \frac{1}{4} e^{3t} \cdot (\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα, στην (1) έχουμε:

$$I \cdot e^{3t} = \frac{5}{4} e^{3t} (\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{5}{4} (\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) + \frac{c}{e^{3t}}.$$

5) Έστω $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ σταθερές, με $\alpha > \lambda > 0$

i. Να λύσετε την εξίσωση

$$y' + \alpha y = \beta \cdot e^{-\lambda t}$$

ii. Αν $y = y(t)$ αποτελεί μια λύση της εξίσωσης τότε νδο $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. Έχουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση

Επομένως,

$$y' + \alpha y = \beta \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow y' \cdot e^{\int \alpha\, dt} + \alpha y \cdot e^{\int \alpha\, dt} = \beta \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\int \alpha\, dt}$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int \alpha\, dt}\right)' = \beta \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\int \alpha\, dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\alpha t} = \int \beta \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\alpha t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\alpha t} = \int \beta \cdot e^{t(\alpha - \lambda)}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\alpha t} = \beta \cdot \frac{1}{\alpha - \lambda} \cdot e^{t(\alpha - \lambda)} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} \cdot e^{-\lambda t} + \frac{c}{e^{\alpha t}} \Rightarrow y(t) = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} \cdot e^{-\lambda t} + \frac{c}{e^{\alpha t}}, \; c \in \mathbb{R}$$

ii. Λόγω ότι $\alpha, \lambda > 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{\lambda t}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{c}{e^{\alpha t}} = 0$$

Άρα, $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$.

6) Ο πληθυσμός $P=P(t)$ μιας χώρας μεταναστεύει με σταθερό ρυθμό $m>0$. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού P, αν δεν υπήρχε μετανάστευση θα ήταν ανάλογος του P

i) Δικαιολογήστε ότι ο Πληθυσμός (P) ικανοποιεί την εξίσωση: $P' = kP - m$, $k>0$ και σταθερό

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $P=P(t)$ εαν $P(0)=P_0$

iii) ΝΔΟ

~ Αν $m< kP_0$, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται

~ Αν $m> kP_0$, τότε ο πληθυσμός μειώνεται

~ Αν $m=kP_0$, τότε ο πληθυσμός παραμένει σταθερός

ΛΥΣΗ

i) Θα έχουμε $P_1'(t) = k\cdot P(t)$ οπού $P_1'(t)$ ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού αν δεν υπήρχε μετανάστευση

καθώς, $P_2'(t) = m>0$ ο ρυθμός μετανάστευσης στη χώρα.

Άρα, άμεσα προκύπτει ότι:

$$P'(t) = P_1'(t) - P_2'(t) = k\cdot P(t) - m$$

ii) $P'(t) - kP(t) = -m \Rightarrow P'(t)\cdot e^{-kt} - kP(t)\cdot e^{-kt} = -m\cdot e^{-kt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(P(t)\cdot e^{-kt}\right)' = -m\cdot e^{-kt} \Rightarrow P(t)\cdot e^{-kt} = -\int m\cdot e^{-kt}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow P(t)\cdot e^{-kt} = \frac{m}{k}\cdot e^{-kt} + c \Rightarrow P(t) = \frac{m}{k} + c\cdot e^{kt}$

Αφού $P(0)=P_0$ τότε $c = P_0 - \frac{m}{k}$, άρα $P(t) = \frac{m}{k} + \left(P_0 - \frac{m}{k}\right)\cdot e^{kt}$

iii) Λόγω ότι $P'(t) = (k\cdot P_0 - m)\cdot e^{kt}$

- $m < kP_0 \Rightarrow kP_0 - m > 0$ τότε ο πληθ. αυξάνεται εκθετικά
- $m > kP_0 \Rightarrow kP_0 - m < 0$ τότε ο πληθ. μειώνεται εκθετικά
- $m = kP_0 \Rightarrow P'(t) = 0$ άρα τότε θα παραμένει σταθερός